8- лекция. Таңбасы ауыспалы қатарлар. Функционалдық қатарлар.

Дайындаған - Ақпараттық технологиялар және интеллектуалды жүйелер мектебінің аға оқытушысы Ж.Т.Жаксыгунова

8 - лекция.
8 Таңбалары ауыспалы қатарлар.

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots \ , \tag{6}$$

$$|u_1| + |u_2| + \ldots + |u_n| + \ldots, \tag{7}$$

қатарларын қарастырамыз.

Анықтама. (6) сандық қатарының мүшелері деп аталатын u_i, $i = 1,2,\ldots$, оң да, теріс те болатын болса, онда бұл қатар таңбалары ауыспалы қатар деп аталады.

Таңбалары алма-кезек ауыспалы қатар (6) қатарының дербес жағдайы:

$$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \ldots, \qquad a_i \geq 0, i = 1,2,\ldots \tag{8}$$

Лейбниц белгісі. Егер (8) қатарының мүшелері үшін қандай да бір N нөмірінен бастап $a_N \geq a_{N+1} \geq a_{N+2} \geq \ldots$ теңсіздігі орындалып және $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ болса, онда (8) қатары жинақты және оның қосындысы оң сан.

Теорема . Егер (7) қатары жинақты болса, онда (6) қатары да жинақты.

Егер (6) қатары жинақты болып, ал (7) қатары жинақсыз болса, онда (6) қатары шартты жинақты деп аталады. Егер (7) қатары жинақты болып және сонымен қатар, (6) қатар да жинақты болса, онда (6) қатар абсолютті жинақты деп аталады. (6) таңбалары ауыспалы қатардың жинақтылығы туралы сұрақ, жалпы жағдайда, таңбалары оң қатар (7)-нің жинақтылығымен шешіледі. Ал таңбалары оң қатардың жинақтылық белгілерін жоғарыда қарастырдық.

15.1 мысал. $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots \qquad (9)$

қатары Лейбниц белгісі бойынша жинақты, ал оның абсолют шамаларынан құрылған қатар (гармониялық қатар) жинақсыз. Ендеше, (9) қатар шартты жинақты.

15.2 – мысал. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \cdot \left(\frac{n}{2n-1}\right)^n$.

Шешуі. Берілген қатардың абсолют шамаларынан құралған қатарды қарастырамыз: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2n-1}\right)^n$.

Бұл қатар Коши белгісі бойынша жинақты: $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n}{2n-1}\right)^n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{2n-1} = \frac{1}{2} < 1$.

Сонымен, берілген қатар абсолютті жинақты.

15.3 – мысал. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$.

Шешуі. Берілген қатардың абсолют шамаларынан құралған қатарды қарастырамыз: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$, бұл қатар көрсеткіші $p = \frac{1}{2} < 1$ болатын Дирихле қатары.

Берілген қатар таңбасы алма-кезек ауыспалы қатар болғандықтан, Лейбниц белгісін қолдансақ:

1) $\frac{1}{\sqrt{n}} > \frac{1}{\sqrt{n+1}}$, яғни, қатардың мүшелерінің тізбегі кемімелі;

2) $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}\right| = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$.

8- лекция. Таңбасы ауыспалы қатарлар. Функционалдық қатарлар.

Дайындаған - Ақпараттық технологиялар және интеллектуалды жүйелер мектебінің аға оқытушысы Ж.Т.Жаксыгунова

Ендеше, берілген қатар шартты жинақты.

8.1 Функционалдық қатарлар.

Анықтама. Функционалдық қатар деп:

$$u_1(x) + u_2(x) + ... + u_n(x) + ..., \tag{1}$$

мұндағы $u_i(x)$, $i = 1,2,...$ қатардың мүшелері функциялар болатын қатарды айтамыз.

x қандай да бір тұрақты мән берсек, (1) қатары сандық қатарға айналады. Сонымен, x-тің қандай да бір мәндерінде (1) қатары жинақты, қандай да бір мәндерінде жинақсыз.

Анықтама. (1) қатары жинақты болатын x мәндер жиыны функционалдық қатардың жинақтылық облысы деп аталады.

Қатардың жинақтылық облысында қатардың қосындысы x-ке байланысты функция болатындықтан, қатардың қосындысын $S(x)$ деп белгілейміз.

15.4 – мысал. $|x| < 1$ болған жағдайда, $1 + x + x^2 + ... + x^n + ...$ қатары жинақты. Себебі, бұл қатар кемімелі геометриялық прогрессия ($a_1 = 1,\quad q = x$) және оның қосындысы $\frac{1}{1-x}$. Сонымен, (-1,1) интервалында берілген қатар жинақты және

$$S(x) = \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + ... + x^n + ...$$

$S_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + ... + u_n(x)$ болса, онда $r_n(x) = u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + ...$ - қатардың қалдық мүшесі.

Теорема 1.. (1) қатарының жинақтылық облысында:

$$\lim_{n\to\infty} r_n(x) = \lim_{n\to\infty}[S(x) - S_n(x)] = 0 .$$

8.2 Бірқалыпты жинақтылық. Функционалдық қатарларға қолданылатын амалдар.

Анықтама. (1) қатары D облысында мажорланған деп аталады, егер $\forall x \in D$ үшін :

$$|u_1(x)| \le \alpha_1, |u_2(x)| \le \alpha_2, ..., |u_n(x)| \le \alpha_n, ...$$

теңсіздігі орындалатындай,

$$\alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n + ..., \tag{2}$$

таңбалары оң жинақты сандық қатар табылса.

15.5 – мысал.

$$\frac{\cos x}{1^2} + \frac{\cos 2x}{2^2} + ... + \frac{\cos nx}{n^2} + ...$$

қатары барлық сан осінде мажорланған екені анық, өйткені,

$\forall x \in (-\infty, \infty) \Rightarrow \left|\frac{\cos nx}{n^2}\right| \le \frac{1}{n^2}, \quad n = 1,2,...$, ал $\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} + ... + \frac{1}{n^n} + ...$ - қатары жинақты қатар.

D облысында мажорланған қатар, осы D облысында абсолютті жинақты. .

Анықтама. $[a;b]$ аралығында жинақты (1) қатары бірқалыпты жинақты деп аталады, егер барлық $n \ge N$ үшін $\forall \varepsilon > 0 : \exists N$,

$$|S(x) - S_n(x)| < \varepsilon \quad \forall x \in [a;b] \text{ болса.}$$

Теорема 2. $[a;b]$ аралығында мажорланған (1) қатары осы кесіндіде бірқалыпты жинақты.

2- теоремадан мажорланған қатар болу бірқалыпты жинақтылықтан да күшті шарт екенін көреміз, яғни, бірқалыпты жинақталатын, бірақ мажорланған емес қатарлар табылады.

8- лекция. Таңбасы ауыспалы қатарлар. Функционалдық қатарлар.

Дайындаған - Ақпараттық технологиялар және интеллектуалды жүйелер мектебінің аға оқытушысы Ж.Т.Жаксыгунова

Теорема 3. (1) қатары $[a;b]$ аралығында бірқалыпты жинақты және $S(x)$ - оның қосындысы болсын. Онда егер:

1. $\lim\limits_{x\to x_0} u_i(x), \quad i=1,2,...$ - табылса, онда

$$\lim_{x\to x_0} S(x) = \lim_{x\to x_0} u_1(x) + \lim_{x\to x_0} u_2(x) + ... + \lim_{x\to x_0} u_n(x) + ..., \quad x_0 \in [a;b]$$

2. қатардың мүшелері $u_i(x), \quad i=1,2,...$ - $[a;b]$ аралығында үзіліссіз және $S(x)$ функциясы да $[a;b]$ аралығында үзіліссіз болса, онда

$$\int_{x_0}^{x_1} S(x)dx = \int_{x_0}^{x_1} u_1(x)\,dx + \int_{x_0}^{x_1} u_2(x)\,dx ... + \int_{x_0}^{x_1} u_n(x)\,dx + ..., \quad x_0 \in (a;b), x_1 \in (a;b)$$, яғни, қатарды мүшелеп интегралдауға болады.

Теорема 4. Егер (1) қатары $[a;b]$ аралығында жинақты болса, $u_i(x) \in C^1[a;b], \quad i=1,2,...$, ал $u_1'(x) + u_2'(x) + ... + u_n'(x) + ...$ қатары $[a;b]$ аралығында бірқалыпты жинақты болса, онда

$$S'(x) = u_1'(x) + u_2'(x) + ... + u_n'(x) + ... \quad \forall x \in [a;b],$$

яғни, қатарды мүшелеп дифференциалдауға болады.

Әдебиеттер

1. Хисамиев Н.Г. Тыныбекова С.Д. Конырханова А.А. Математика II. ШҚМТУ, 2008
2. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление для втузов. Т.1,2 М.:Наука, 2009г.
3. ЖҮТ Айдос Е.Ж. Жоғары математика. 3 бөлім Бастау, 2008

4 Сборник ИДЗ по высшей математике. Под редакцией Рябушко А.П., ч.1,2,3 Минск, «ВШ», 2002г.